実有理力学系とトロピカル幾何学

加藤　毅　（京都大学大学院理学研究科）

1　はじめに

ある対象から構成される集合にたいして、その集合の無限遠点にも別の対象を見つけることができる。例えば、ある構造のモジュライ空間のコンパクト化では、無限遠点にさらなる構造をみつけることができる。また離散群の中で、双曲的群と呼ばれるクラスの群については、そのグロモフコンパクト化が知られており、無限遠点に対応する境界上には群自身が作用している。

いま $t \in (1, \infty)$ でパラメトライズされた力学系のファミリーを考え、t を無限大に持っていったとき、別の力学系が現れたとしよう。t が有限であるときと、$t = \infty$ のときとでは、それら両者の性質が本質的に異なるような対象をもたらすとき、それをスケール変換とここでは呼ぶことにする．特に $t \to \infty$ で、力学系を定める定義方程式どうしが移り合うが、軌道が退化してしまう場合がある。このような場合、t が有限での軌道のうち、無限遠の近傍にいるものだけが $t = \infty$ での力学系の振る舞いに寄与する。

トロピカル幾何学は、実有理関数と、max と $+$ 演算子で構成される $(\max, +)$ 関数とを結びつけ、関数から定まる力学系に関して、スケール変換を与える。

一般に、ただパラメーターを無限大に持っていっただけでは、t が有限であるときの軌道と、$t = \infty$ のときの軌道の間に関係を見つけることは難しいであろう。トロピカル幾何学で定まるスケール変換の特徴の一つは、その両者の軌道の間にある種の一様な評価を与える点で、これにより実有理力学系の評価を行うときに、対応する $(\max, +)$ 関数で定まる力学系を用いることができる。そのような特徴は、$(\max, +)$ 関数がリプシッツ関数であることから従う。特に、$t = \infty$ での力学系は再帰であって、$t < \infty$ ではそうでないようなものがあるが、一方である種の一様な評価を与えることで‘擬再帰的’な挙動を持つことを見る。

2 トロピカル幾何学と軌道

2.A トロピカル幾何学：トロピカル幾何学は、$\mathbb{R}$ 上の有理関数と 2 つの演算子 $(\max, +)$ で定まる P L 写像との間の対応を与える。$t > 1$ をパラメーターとした実数 $\mathbb{R}$ 上の半環を、$x \oplus_t y = log_t(t^x + t^y)$, $x \otimes_t y = x + y$ で定める。重要な点は $t \to \infty$ としたとき、$x \oplus_t y \to \max(x, y)$ が成り立つことである。この構造を用いた関数 $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$\varphi_t(\bar{x}) = (\alpha_1 + \bar{j}_1 \bar{x}) \oplus_t \ldots \oplus_t (\alpha_m + \bar{j}_m \bar{x})$$

で定める。ここで、$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ $\bar{j} \in \mathbb{Z}^n, \alpha_l \in \mathbb{R}$ で、$\bar{j}\bar{x}$ は内積をあらわす。すると、上で述べたことから、$t \to \infty$ としたとき次の $(\max, +)$ 関数が得られる：

補題 2.1.

$$\varphi_\infty(\bar{x}) = max(\alpha_1 + \bar{j}_1 \bar{x}, \ldots, \alpha_m + \bar{j}_m \bar{x})$$

$Log_t : \mathbb{R}^n_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を $(z_0, z_1, \ldots z_{n-1}) \longmapsto (log_t z_0, \ldots log_t z_{n-1})$ で定める。ここで、$\mathbb{R}^n_{>0}$ はすべての成分が正の数の意味である。

補題 2.2 (LM,V). $F_t \equiv log_t^{-1} \circ \varphi_t \circ Log_t : \mathbb{R}^n_{>0} \to (0, \infty)$ と、$\log_t$ で φ_t の共役を取ると、次の有理関数が得られる：

$$F_t = \sum_{l=1}^{m} t^{\alpha_l} \cdot \bar{z}^{\bar{j}_l} \quad (\bar{z}^{\bar{j}_l} = z_1^{j_l^1} \ldots z^{j_l^n})$$

(もしすべての $\alpha_l = 0$ が消えていれば F_t は実は t によらない。)

これから 3 つの関数が現れたが、それらについて表示の間の 1 対 1 対応：

$$\varphi_t \longleftrightarrow \varphi_\infty \longleftrightarrow F_t$$

が成り立つ。特に φ_∞ の表示を一つ与えたとき対応して F_t が得られる。

以下では上の形の有理関数のみを扱う。

2.B 軌道の比較とスケール変換：さてここで 3 つの関数のうち、φ を n 変数 $(\max, +)$ 関数とする。上の対応により φ_t と F_t が与えられるが、初期条件をそれぞれ $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$、$\bar{z} = (z_0, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^n_{>0}$ とおくことにより、3 つの力学系が与えられる：

$$Orbit1: \ x_N = \varphi(x_{N-n}, x_{N-n+1}, \ldots, x_{N-1}), \tag{1}$$
$$Orbit2: \ x'_N = \varphi_t(x'_{N-n}, x'_{N-n+1}, \ldots, x'_{N-1}), \tag{2}$$
$$Orbit3: \ z_N = F_t(z_{N-n}, z_{N-n+1}, \ldots, z_{N-1}) \tag{3}$$

ただし、Orbits 1, 2 は初期条件を $\bar{x}$ にし、Orbit 3 は初期条件を $\bar{z}$ にする。

観察 2.1. （１）初期条件に、$x_0 = \log_t z_0, \ldots, x_{n-1} = \log_t z_{n-1}$ の関係式を入れておくと、φ_t と F_t は $\log_t$ で共役であるから、

$$x'_N = \log_t z_N$$

を満たす。

（２）一方で、$\lim_{t\to\infty} \varphi_t = \varphi$ だから、$t \to \infty$ で $\{x_N\}_N$ と $\{x'_N\}_N$ はある意味で｀近い’ので、$t \to \infty$ で

$$\{x_N\}_N, \quad \{z_N\}_N$$

の二つの軌道は何か関係があることが期待されるが、実際以下にそのことを述べる。

3 再帰写像

3.A 再帰写像： $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を n 変数の関数とする。

定義 3.1. φ が周期 M の再帰写像とは、任意の初期値 $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ について、その軌道 $\{x_N\}_N$ が、

$$x_M = x_0, \ldots, x_{M+n-1} = x_{n-1}$$

を満たすときをいう。

観察 3.1. $\varphi(x_0, x_1) = \max(-x_1, x_1) - x_0$ は周期 9 の再帰写像で（[広高]）、対応する有理関数は、$F(z_0, z_1) = \frac{1+z_0^2}{z_0 z_1}$ だが、これは再帰写像ではない。

このことは、コンピューター計算により判明した（計算は辻本諭さんにやっていただいた）。φ と F のどちらも t によらないが、一方で両者は t でパラメトライズされたスケール変換により移り合っている。このような現象の起こる理由は、

$$t \to \infty \text{ で方程式は移る、} \log_t \circ F \circ Log_t^{-1} \to \varphi$$

が、解（軌道）は退化する、つまり

$$\log_t z_N \to 0$$

となることで、ここにスケール変換によって生じる揺らぎが現れる。

3.B トロピカル変形: φを観察3.1の$(\max,+)$関数とすると、$\max(-x_1,x_1)\geq 0$だから、不等式$\varphi(x_0,x_1)=\max(-x_1,x_1)-x_0\geq -x_0$を満たす。このことから次の等式が成り立つ：

$$\psi(x_0,x_1)=\max(\varphi(x_0,x_1),-x_0)=\varphi(x_0,x_1)$$

すなわち、表示は違うが、写像としては同じものである。特に、ψも再帰写像である。一方、対応する有理関数は、$G(z_0,z_1)=\frac{1+z_1+z_1^2}{z_0z_1}$である。これも再帰写像ではないことがコンピューター計算により分かる。

定義 3.2. φとψを二つのn変数$(\max,+)$-関数とし、対応する実有理関数を、それぞれF_tとG_tとあらわす。

G_tがF_tのトロピカル変形とは、φとψが同じ写像を与えるときをいう。

上のFとGのように、対応する$(\max,+)$関数が表示は違っても同じ関数を与えるから、GはFのトロピカル変形になっている。

例 3.1. φとφ'を二つのn変数$(\max,+)$-関数とし、各$\bar{x}\in\mathbb{R}^n$にたいして、不等式$\varphi(\bar{x})\geq\varphi'(\bar{x})$が成り立つとする。$\varphi$と$\varphi'$に対応する実有理関数をそれぞれ$F_t$と$G_t$とおくとき、$F_t+G_t$は$F_t$のトロピカル変形になっている。

特に、$2F_t$はF_tのトロピカル変形である。

これは、$\psi\equiv\max(\varphi,\varphi')$と置くと、$\psi$と$\varphi$は上の関係から同じ写像を与えるが、一方で$\psi$に対応する実有理関数は$F_t+G_t$となっていることから従う。

4 主定理

4.A 軌道の一様評価： 揺らぎが生じても、マクロな視点(large scale)から見ると共通する性質が見られる。

定理 4.1 (K3). G_tがF_tのトロピカル変形であることの必要十分条件は、ある数$m,C\geq 1$が存在して次を満たすことである。任意の同じ初期値を$z_0=w_0,\dots,z_{n-1}=w_{n-1}\in(0,\infty)$とし、$F_t$と$G_t$の軌道をそれぞれ$\{z_N\}_N$, $\{w_N\}_N$とおくとき、一様評価：

$$\frac{z_N}{w_N},\ \frac{w_N}{z_N}\ \leq m^{C^N}$$

が成り立つ。

例 4.1. （1）$F_t(z) = z^l$, $G_t(w) = w^k$ とおく。$k \neq l$ の場合、F_t は G_t のトロピカル変形ではない。ただし $l, k = 0, 1, 2, \ldots$

なぜならば、$l > k$ とし、初期値を $z_0 = w_0$ とおくとき、

$$z_N = z_0^{l^N}, \quad w_N = z_0^{k^N}$$

となり、

$$\frac{z_N}{w_N} = z_0^{l^N - k^N}$$

で、確かに二回指数的な増大度を持つが、それは初期値 z_0 に大きく依存している。実際、対応する (max, +)-関数をそれぞれ φ と ψ とおくと、$\varphi(V) = lV$、$\psi(V) = kV$ となり、φ と ψ は違う写像である。

（2）$F_t(z) = 2z^l$, $G_t(w) = w^l$ とおく。このとき、F_t は G_t のトロピカル変形になっている。初期値を $z_0 = w_0$ とおくとき、

$$z_N = 2^{\frac{l^N - 1}{l-1}} z_0^{l^N}, \quad w_N = z_0^{l^N}$$

となり、

$$\frac{z_N}{w_N} = 2^{\frac{l^N - 1}{l-1}}$$

で、一様な二回指数的な増大度を持つ。対応する (max, +)-関数をそれぞれ φ と ψ とおくと、$\varphi(V) = \max(lV, lV)$、$\psi(V) = lV$ となり、φ と ψ は同じ写像である。この例は定理 4.1 の一様評価において、二回指数増大度が最良であることを示している。

4.B 擬再帰写像： さて一般に φ に対応する有理写像を F_t とおく。F_t が周期 M の再帰写像であるとは、すべての $t > 1$ について、各 F_t が周期 M の再帰写像となるときをいう。

補題 4.1. F_t が周期 M の再帰写像であれば、対応する (max, +) 関数 φ も同じ周期の再帰写像になる。

上の逆は一般には成立しなかった。(観察 3.1)

観察 4.1. トロピカル変形は位相的共役を必ずしも導かない。

二つの写像 F_t と G_t による軌道が位相的共役とは、ある別の可逆な関数 H_t によって、$G_t = H_t^{-1} \circ F_t \circ H_t$ と書けるときをいう。この場合特に、F_t が再帰写像であれば G_t もそうなる。

さて、$F(z_0, z_1) = \frac{1+z_1}{z_0}$ は、周期 5 の再帰写像となり、補題 4.1 から、対応する (max, +) 関数 $\varphi(x_0, x_1) = \max(0, x_1) - x_0$ も周期 5 の再帰写像となる。

不等式 $\max(0, x_1) - x_0 \geq -x_0$ より、次の等式が成り立つ：

$$\psi(x_0, x_1) \equiv \max(\varphi(x_0, x_1), -x_0) \tag{4}$$

$$= \max(\max(0, x_1) - x_0, -x_0) = \max(0, x_1) - x_0 \tag{5}$$

$$= \varphi(x_0, x_1) \tag{6}$$

ψ は φ と同じ写像である。ψ に対応する有理写像は、$G(z_0, z_1) = \frac{2+z_1}{z_0}$ となり、G は F のトロピカル変形になっている。一方で、簡単な計算により、G は周期 5 の再帰写像ではないことが分かる。

さて、それではトロピカル変形によってどのような性質が保たれるであろうか。その一つの答えを以下に述べよう。その前に一つ定義をしておく。

定義 4.1. F_t が周期 M の擬再帰写像であるとは、ある定数 C が存在して、任意の初期値 $z_0 \ldots, z_{n-1}$ にたいしてその軌道を $\{z_N\}_N$ とおくとき、N によらない評価：

$$\frac{z_{M+N}}{z_N}, \frac{z_N}{z_{N+M}} \leq C$$

が成り立つときとする。

特に、再帰写像は擬再帰である。

定理 4.2 (K3). φ に対応する有理写像を F_t とおく。

このとき、φ が周期 M の再帰写像であることと、F_t が周期 M の擬再帰写像であることは同値である。

特に擬再帰写像であることはトロピカル変形で不変である。

このように、無限遠点に対応する $(\max, +)$ 関数 φ が再帰であっても、内部の実有理力学系では揺らぎが生じて、サイクルからずれていくことがわかる。

定理 4.2 から、擬再帰写像の semi additivity が成り立つ：

系 4.1. F_t と G_t を実有理関数とし、対応する $(max, +)$ 関数をそれぞれ φ、ψ とおく。

各点ごとに不等式 $\varphi \geq \psi$ が成り立つとしよう。このとき、もし F_t が周期 M の擬再帰写像であれば、$F_t + G_t$ もそうなる。

例 4.2. $l = 0, 1, 2, \ldots$ について、

$$F_t^l(z_0, z_1) \equiv \frac{1 + l z_1 + z_1^2}{z_0 z_1}$$

はすべて周期 9 の擬再帰写像となる。実際、対応する $(\max,+)$ 関数 φ_l は、

$$\varphi_l(x_0,x_1) \equiv \max(\varphi(x_0,x_1), -x_0, \ldots, -x_0) \tag{7}$$

$$= \varphi(x_0,x_1) = \max(-x_1,x_1) - x_0 \tag{8}$$

となる。ここで $\varphi \equiv \varphi_0$ で、また上で $-x_0$ は l 回繰り返す。

5 実有理力学系の摂動

8.A 摂動に関して停留している力学系：以下では $n=2$ を仮定する。

これまで、二つの軌道の商を評価してきた。定理 4.1 と 4.2 では、一つの軌道の有界性について情報を与えてはくれない。ここでは、実有理関数 F_t にたいして、その軌道が常に有界になるか？という問いを考える。

観察 5.1. $F(z_0,z_1) = \frac{1+z_1}{z_0}$ は周期 5 の再帰写像であった。特にすべての軌道は有界である。F のトロピカル変形 G、例えば $F^l(z_0,z_1) \equiv \frac{1+l+z_1}{z_0}$ $(l=0,1,\ldots)$ は、定理 4.2 から擬再帰写像である。一方で、これらのうちどのような変形について、すべての軌道が有界であるか、についてはまだわかっていない。

このように再帰写像をトロピカル変形したものについて、軌道の有界性については一般的には良くわからないので、それらを連続変形したものを考える。

$|\epsilon| < \epsilon_0$ にたいし、F_t の連続変形 F_t^ϵ を考える。

定義 5.1. F_t が F_t^ϵ について停留しているとは、次の（1）、（2）を満たすときとする。

（1）すべての $0 < \epsilon < \epsilon_0$ について、F_t^ϵ に関するすべての軌道が有界であり、

（2）ある定数 $C > 0$ が存在して、すべての $-\epsilon_0 < \epsilon < 0$ と F_t^ϵ に関して、初期値が $|(z_0,z_1)| \geq C$ を満たせば、その軌道 $\{z_N\}_N$ は非有界である。

ここでは、具体的に次の例が停留していることを見る：

定理 5.1 (K3)**.** G_t を $F_t(z_0,z_1) = \frac{1+z_1}{z_0}$ のトロピカル変形とする。このとき G_t は、

$$G_t^\epsilon(z_0,z_1) = z_0^\epsilon G_t(z_0,z_1)$$

について停留している。

これは、軌道の評価を直接行わずに、一旦トロピカル対応により、$(\max,+)$ 関数の軌道の評価を経ることにより示される。そのような迂回路を通る利点は、$(\max,+)$ 写像は PL であることから、その軌道の様子は有理関数のものよりわかりやすく調べられることがあげられる。

5.B PL 写像のトレース： $\varphi(x_0,x_1)$ を $(\max,+)$ 関数とする。これから、$\mathbb{R}^2$ 上の写像

$$\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, \tag{9}$$
$$(x_0,x_1)\to(x_1,\varphi(x_0,x_1)) \tag{10}$$

が自然に作られる。(x_0,x_1) を初期値とする φ の軌道 $\{x_N\}_N$ にたいして、$\varphi^N(x_0,x_1)=(x_N,x_{N-1})$ が成り立つ。

一般に $(\max,+)$ 写像は PL 写像である。そこで、$\mathbb{R}^2$ 平面上、初期値 $(x_0,x_1)\in\mathbb{R}^2$ をとり、

$$L_0\equiv(x_0,x_1) \text{ と } \varphi(x_0,x_1) \text{ とを結ぶ線分}$$

とする。このとき、φ による (x_0,x_1) のトレースとは、

$$L=\cup_{l=0}^{\infty}\varphi^l(L_0)\subset\mathbb{R}^2$$

のこととする。これは連結な PL 線分である。

$(\max,+)$ 関数 $\varphi(x_0,x_1)$ にたいして、

$$\varphi_\epsilon(x_0,x_1)\equiv\varphi(x_0,x_1)+\epsilon x_0$$

とおき、φ の（x_0 に関する）ϵ 摂動と呼ぶ。

補題 5.1. $\varphi(x_0,x_1)=\max(0,x_1)-x_0$ とその ϵ 摂動 φ_ϵ について、ある $\epsilon_0>0$ が存在し、以下のことが成り立つ：

（1）$0<\epsilon<\epsilon_0$ にたいしては、φ_ϵ のトレースは安定フォーカス、

（2）$-\epsilon_0<\epsilon<0$ にたいしては、φ_ϵ のトレースは不安定フォーカス。

.

一般に、2変数 $(\max, +)$ 関数 φ と、それに対応する実有理関数 F_t にたいして次のことが成り立つ：

補題 5.2. （1）φ_ϵ のトレースが安定フォーカスならば、F_t のすべての軌道は有界。

（2）φ_ϵ のトレースが不安定フォーカスならば、ある定数 $C \geq 0$ が存在して、任意の初期値 $|(z_0, z_1)| \geq C$ についての F_t の軌道 $\{z_N\}_N$ は、非有界となる。

定理 5.1 は、これまでの補題を組み合わせて得られる。

References

[GKP] R.Graham, D.Knuth and O.Patashnik, *Concrete mathematics*, Addison-Wesley (1994).

[HY] R.Hirota and H.Yahagi, *Recurrence equations, an integrable system*, Journal of Phys. Soc. Japan **71** pp. 2867-2872 (2002).

[広高] 広田良吾、高橋大輔, 差分と超離散, 共立出版 (2003).

[K1] T.Kato, *Operator dynamics in molecular biology*, in the Proceedings of the first international conference on natural computation, L.N. in computer science **3611** pp. 974-989 (2005), Springer.

[K2] T.Kato, *Pattern formation from projectively dynamical systems and iterations by families of maps*, To appear in the Proceedings of the 1st MSJ-SI, Probabilistic Approach to Geometry.

[K3] T.Kato, *Deformations of real rational dynamics in tropical geometry*, GAFA **19** No 3 pp. 883-901 (2009).

[Ko] ランダムから可積分系へ、スケール変換によるパターン形成,（小谷元子編）東北大学春の学校 (2007).

[LM] G.Litvinov and V.Maslov, *The correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications*, Idempotency, Ed. J.Gunawardena, Cambridge Univ. Press, pp420-443 (1998).

[MS] W. de Melo and S. van Strien, *One dimensional dynamics*, Springer (1993).

[Mi] G.Mikhalkin, *Amoebas and tropical geoemtry*, in Different faces of geometry eds, S.Donaldson, Y.Eliashberg and M.Gromov, Kluwer academic plenum publ., (2004).

[R] C.Robinson, *Dynamical systems, stability, symbolic dynamics, and chaos*, Studies in Adv. Math., CRC press (1999).

[TI] D.Takahashi and M.Iwao, *Geometrical dynamics of an integrable piecewise-linear mapping*, Bilinear integrable systems: from classical to quantum, continuous to discrete, (NATO science series II: mathematics, physics and chemistry, eds. L.D.Faddeev, P.V. Moerbeke, F.Lambert) **201** pp. 291-300 (2005)

[V] O.Viro, *Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper*, Proc. of the European Congrress of Math., (2000).

[W] S.Wolfram, *Cellular automata and complexity*, Addison Wesley (1994).